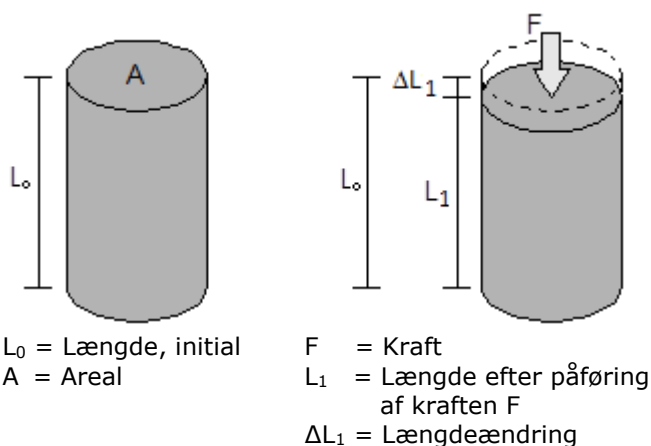


### 10.3 E-modul

Af Jens Ole Frederiksen og Gitte Normann Munch-Petersen



Forskellige materialer har forskellige E-moduler.

Hvis man fx placerer 15 ton (svarende til 10 typiske mellemklassebiler) oven på en almindelig Ø150/300 mm betoncylinder, vil cylinderen blive trykket cirka 0,08 mm sammen.

Til sammenligning ville cylinderen blive trykket 0,25 mm sammen, hvis den var lavet af grantræ, og 0,01 mm hvis den var lavet af stål.

$$\text{Spænding: } \sigma = \frac{F}{A}$$

$$\text{Tøjning: } \varepsilon = \frac{\Delta L_1}{L_0}$$

$$\text{E-modul: } E = \frac{\sigma}{\varepsilon}$$

Figur 1. Sammenhæng mellem kraft og deformation.

Betons elasticitetsmodul (ofte kaldet E-modul) er et mål for stivheden. E-modulet har betydning for, hvor meget en søjle trykkes sammen, eller hvor meget en bjælke bøjer ned, når der påføres last. Betons E-modul afhænger primært af betontypen og betonstyrken. En beton til almindelig husbygning med en styrke på 20 MPa har et E-modul på omkring 30.000 MPa.

#### 10.3.1 Definition

Deformationen af et lineært elastisk legeme stiger proportionalt med den påførte belastning. Det vil sige at hvis lasten bliver dobbelt så stor, bliver deformationen også dobbelt så stor. Denne sammenhæng (Hookes lov) blev første gang beskrevet af den engelske fysiker Hooke i 1660.

Hookes lov udtrykker elasticitetsmodulet som en lineær sammenhæng mellem spænding og tøjning i et lineært elastisk materiale. Et materiales E-modul kan bestemmes ved et belastningsforsøg med opstilling som vist på figur 7.

Formlen til beregning af E-modul på basis af tryk- eller trækforsøg er:

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon}$$

Hvor:  $\sigma$  er spændingen i last/areal  
 $\varepsilon$  er tøjningen i længdeændring/målelængde

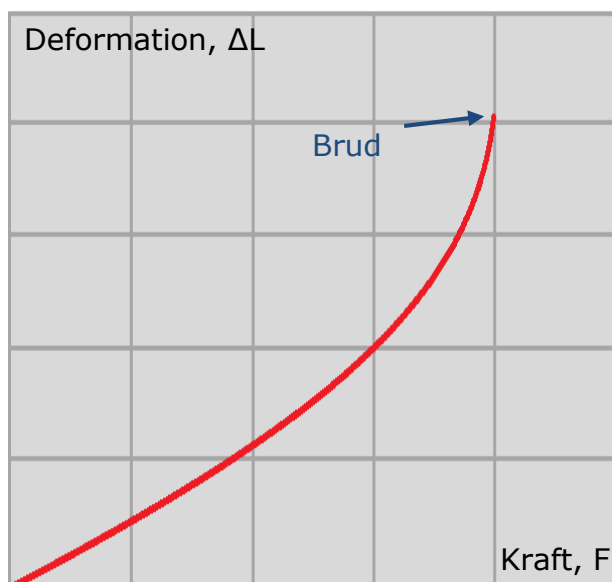
Hvis lasten måles i N og arealet i  $\text{mm}^2$ , fås E-modulet i  $\text{N}/\text{mm}^2$  eller MPa. Da E-moduler for beton er af størrelsesordenen 30.000 MPa, anvendes ofte enheden GPa, hvorved betons E-modul bliver af størrelsesordenen 30 GPa.

### 10.3.2 Betons E-modul

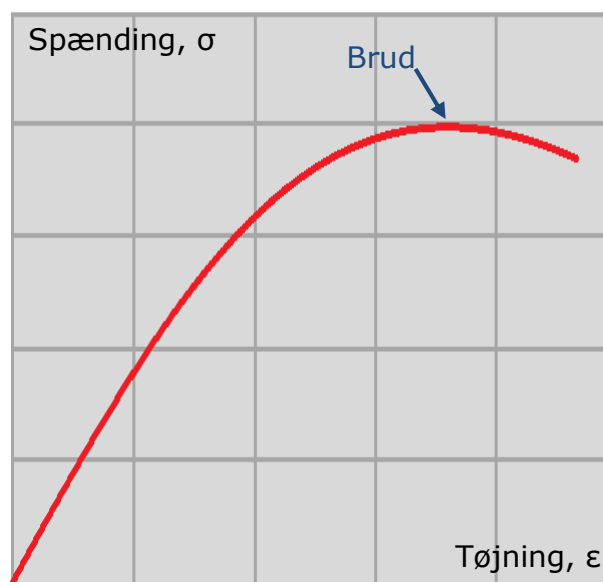
Elasticitetsmodulet kan kun beregnes efter Hookes lov, hvis der er tale om et lineært elastisk materiale. Beton opfører sig imidlertid ikke lineært elastisk. Hvis et betonemne påføres last i lige store trin, vil tilvæksten i deformation blive større for hvert lasttrin, indtil der indtræder brud. Årsagen til at beton ikke er lineært elastisk, er dannelse af små revner under stigende spænding. Hertil kommer desuden krybning (se kapitel 10.5). I praksis kan ikke-linearitet og krybning ikke adskilles.

I Figur 2a ses virkemåden af en betonkonstruktion, hvor der påføres en kraft. Deformationen stiger, når kraften øges, indtil der opstår brud. Når betons styrke skal bestemmes ved laboratorieprøvning, kan forsøget udføres med deformationsstyring, dvs. at maskinen indstilles til at øge deformationen med en given hastighed. Dermed kommer kraften til at afhænge af deformationen. Dette gør det muligt at fortsætte forsøget efter at der er opstået brud. Deformation omregnes til tøjning og kraft til spænding, hvorefter kan der optegnes en såkaldt arbejdslinje, hvor spændingen afhænger af tøjningen, se Figur 2b. Faldet på det sidste stykke af kurven kan kun vises ved deformationsstyrede laboratorieforsøg. I statisk bestemte konstruktioner er deformationen styret af kraften, og derfor vil en konstruktion kollapse, når toppunktet på kurven nås.

a) Deformation som funktion af lasten



b) Spænding som funktion af tøjning



Figur 2. Arbejdslinjer for beton (krybning er ikke medregnet). Efter at højeste last på figuren til venstre er nået, indtræder brud i betonen og tøjningen stiger drastisk mens spændingen falder. Spændingsfaldet efter brud er dog ikke vist på figuren til venstre. Den tilbagegående kurve efter brud på figuren til højre kan kun opnås med et deformationsstyret lastudstyr.

I forbindelse med forsøg til bestemmelse af E-modul anvendes der normalt kraftstyring, men traditionelt afbildes spændingen som en funktion af tøjningen, som vist i Figur 2b. Dermed bliver hældningen på arbejdskurven et mål for E-modulet. Da kurven krummer, ses det at E-modulet afhænger af den påførte spænding, og E-modulet kan derfor ikke umiddelbart beregnes efter Hookes lov. I stedet beskrives sammenhængen mellem spænding og tøjning vha. et sekantmodul eller et tangentmodul.

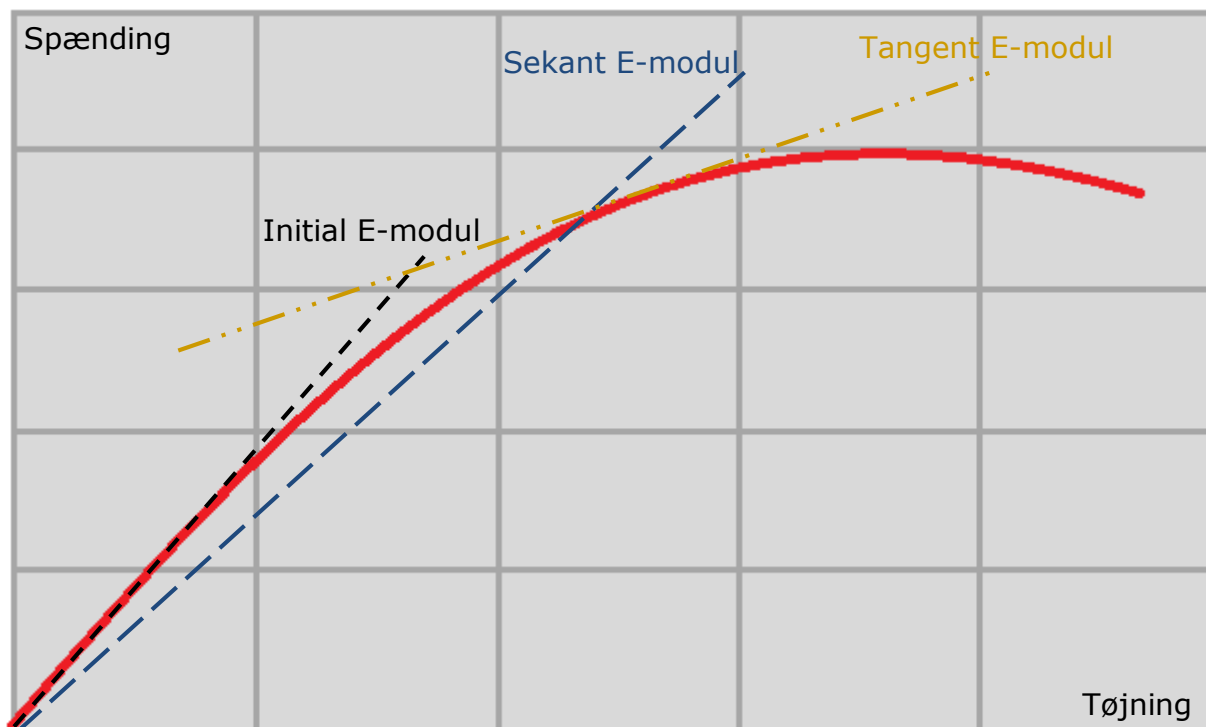
Sekant E-modulet  $E_{cm}$ , beregnes som hældningen af den rette linje gennem to punkter på spændings-tøjnings kurven.

$$E_{cm} = \frac{\sigma_2 - \sigma_1}{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}$$

For beton anvendes ofte begyndelsespunktet (0,0) – eller af prøvningstekniske årsager et punkt tæt herpå som det ene punkt i sekantmodulet, og herved fås initial E-modulet, også kaldet begyndelses E-modulet.

Tangent E-modulet,  $E_{tan}$ , er hældningen af spændings-tøjnings kurven i et givet punkt:

$$E_{tan} = \frac{d\sigma}{d\varepsilon}$$

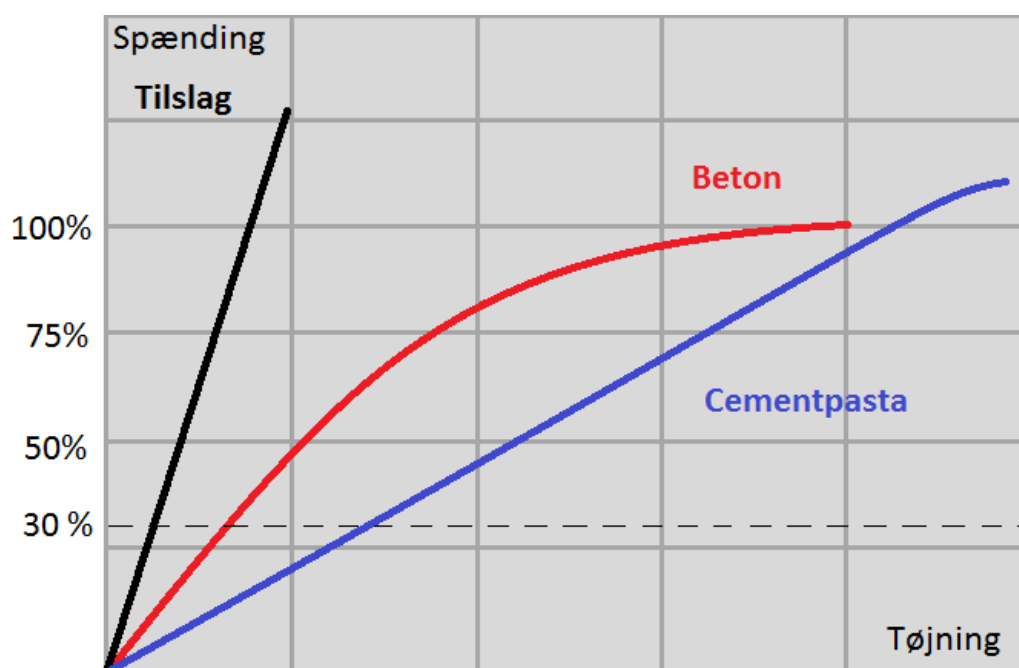


Figur 3. Arbejdskurve fra forsøg til bestemmelse af E-modul for beton. Hældningen af den sorte kurve repræsenterer initial E-modulet, som er E-modulet ved små laster og små deformationer. Hældningen af den blå kurve repræsenterer sekant E-modulet, som er et gennemsnits E-modul for et bestemt lastniveau. Hældningen af den gule kurve repræsenterer tangent E-modulet.

Ved lave spændinger er spændings-tøjningsforholdet næsten konstant for både tilslag, pasta og beton. Når spændingen bliver højere end ca. 30 % af brudspændingen, begynder betonens arbejdslinje at krumme, fordi der dannes mikrorevner i grænsefladen mellem tilslag og pasta. Dette skyldes forskel i E-modulerne og deraf følgende forskel i tøjning af cementpasta og tilslag (se figur 4).

Ved ca. 50 % af betonens brudspænding bliver revnerne ustabile og vokser i grænsefladen mellem sten og tilslag, og breder sig ud i cementpastaen, hvorved betonens E-modul mindskes yderligere.

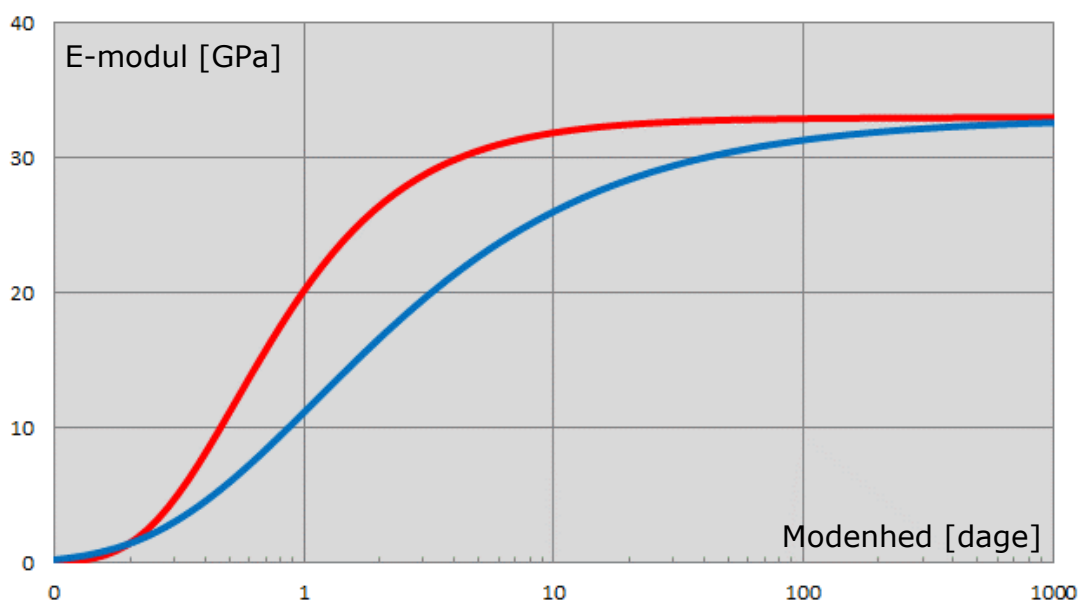
Ved 75 % nås den kritiske spænding. Over 75 % er revnerne ustabile, og der sker tidsafhængigt brud, ved konstant belastning. Se også i afsnit 10 om krybning.



Figur 4. Arbejdskurve for beton, tilslag og cementpasta.

Betons E-modul (fx målt som initial E-modulet) stiger med betonens modenhed. E-modulet efter lang tid kaldes slut E-modulet. Efter 1 modenhedsdøgn er E-modulet typisk mellem 30 og 60 % af slut E-modulet. Efter 28 modenhedsdøgn er E-modulet tilsvarende typisk mellem 85 og 98 % af slut E-modulet. Udviklingen afhænger primært af cementtypen.

Figur 5 viser E-modulets udvikling med tiden for to forskellige betoner, en "hurtig" beton fx med rapid cement og en "langsom" beton fx med lavalkali cement og flyveaske.



Figur 5. Eksempler på E-modulets udvikling med tiden. Den røde kurve viser et eksempel på E-modulet i relation til modenheden (betonens alder ved 20°C) for en beton, hvor der er anvendt cement med hurtig styrkeudvikling. Den blå kurve viser E-modulet i relation til modenheden for en beton, hvor der er anvendt en cement med en langsom styrkeudvikling. De to betoner på figuren har for sammenlignelighedens skyld samme slut E-modul.

Betons E-modul afhænger primært af betonens sammensætning, primært v/b-forhold, cementtype samt tilslagets kvalitet, på samme måde som styrken. Betons tryk- og trækstyrke er behandlet i afsnit 10 Hærdnende og hærdnet beton.

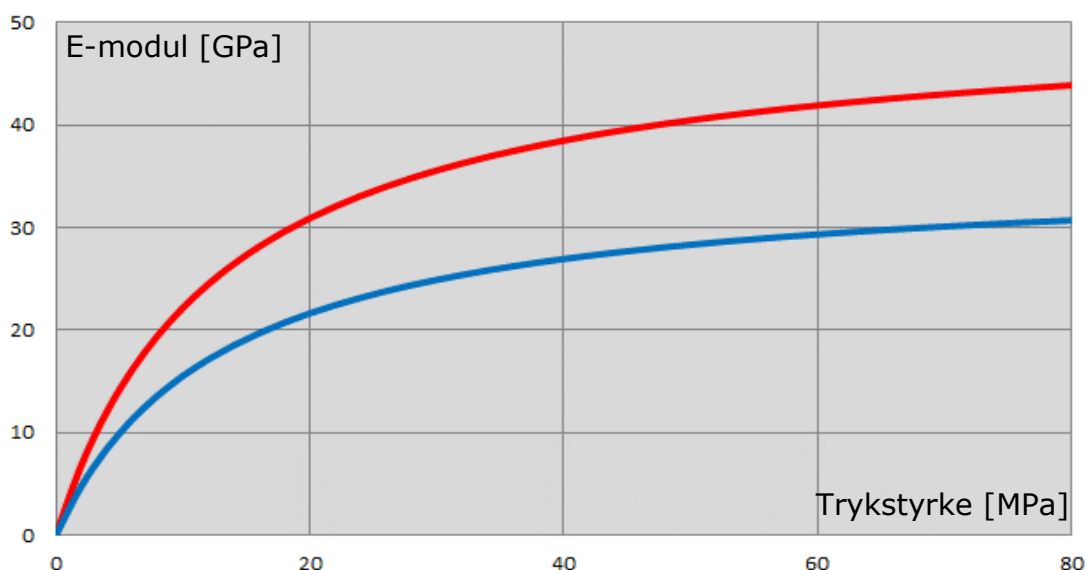
### 10.3.2.1 E-modul og deformationsberegninger

Deformationsberegninger er primært relevante for nedbøjning af plader og bjælker, mens sammentrykningen af søjler er så små, at selve sammentrykningen normalt er uden betydning (En søjles bæreevne er imidlertid størst med et stort E-modul).

Ved beregning af forventet nedbøjning af en bjælke udsat for en bestemt last, skal lastens størrelse i forhold til bæreevnen først bestemmes. Når forholdet mellem last og bæreevne er bestemt, optegnes en linje svarende til sekant E-modulet (blå kurve i figur 3). Hældningen af denne linje er et mål for det E-modul, der skal anvendes i beregning af nedbøjningen.

Beregning af nedbøjning, når der påføres en given last, baseres således på sekant E-modulet. Hvis man ønsker at beregne en deformationsændring i tilfælde, hvor den påførte last ændres lidt, er det tangent E-modulet (gul kurve i figur 3), der skal anvendes, da denne kurve repræsenterer E-modulet efter den første last er påført.

Hvis det ikke er afgørende at kende det præcise E-modul, kan man anvendes et E-modul, der aflæses af Figur 6 ud fra kendskab til betonens trykstyrke.



Figur 6. Sammenhæng mellem karakteristisk trykstyrke og karakteristisk E-modul. Rød kurve svarer til initial E-modul og blå kurve svarer til sekant E-modul (bestemt ved 33 % af brudstyrken). Sammenhængen er hentet fra det danske annekse til Eurocode 2 (DS/EN 1992-1-1 DK NA:2011). Kurven for initial E-modulet svarer til den sammenhæng, der var angivet i den tidligere betonnorm DS 411.

De ovenfor beskrevne deformationsberegninger gælder for en korttids-last. Hvis der er tale om en blivende eller en længerevarende belastning, øges deformationen væsentligt på grund af krybning i betonen, se afsnit 10 Hærdnende og hærdnet beton. Der tages ofte hensyn til krybning ved blot at reducere E-modulet – fx til en tredjedel af korttids E-modulet. Dette svarer til, at langtidsdeformationen bliver 3 gange så stor, som den øjeblikkelige deformation ved samme belastning.

### 10.3.2.2 E-modul og bæreevneberegninger

Ved beregninger af bæreevnen af slanke konstruktioner (fx søjler), hvor der kan være risiko for stabilitetsbrud, er E-modulet en væsentlig parameter. E-modulet bør derfor bestemmes for den aktuelle beton, med mindre E-modulet tidligere er målt for den anvendte beton. Alternativt kan man anvende et E-modul, som man ved, er på den sikre side (altså med sikkerhed er for lavt).

### 10.3.2.3 E-modul og hærdeberegninger

Ved spændingsberegninger af hærdnende betonkonstruktioner indgår E-modul også som en væsentlig parameter, og her er det E-modulets udvikling med tiden, der skal anvendes. Til dette brug bestemmes E-modulet fx efter 1, 3, 7, 14 og 28 døgn. Ud fra disse værdier foretages en kurvefitning, der tilpasses de målte E-moduler. Figur 5 viser eksempler på E-modulets udvikling med tiden. Kurveværdierne bruges i hærdeberegningerne. Se mere i afsnit 9 Udførelse.

### 10.3.3 Bestemmelse af betons E-modul

Betons E-modul bestemmes efter prøvningsmetode DS/EN 12390-13:2013 "Prøvning af hærdnet beton - Del 13: Bestemmelse af elasticitetsmodul (sekantmodul) under trykpåvirkning". I standarden er der en metode A og en metode B, hvor metode A tager sigte på både at bestemme initial E-modulet og sekant E-modulet, mens metode B kun tager sigte på at bestemme sekant E-modulet. I forbindelse med beregninger af risikoen for revner som følge af temperaturforskelle under betonens hærdning (hærdeberegninger) anvendes initial E-modulet, og derfor anbefales det at bruge metode A. Det er derfor denne metode, der refereres til nedenfor.

E-modulet måles typisk på støbte 100 x 200 eller 150 x 300 mm cylindre.

Ved et forsøg skal sammenhængen mellem spænding og tøjning måles. Tøjningen skal måles over den midterste halvdel af prøveemnet, det vil sige over 100 mm for 100 x 200 mm cylindre og over 150 mm for 150 x 300 mm cylindre.

Der skal måles tøjninger langs to modstående linjer på emnet symmetrisk om centrum, således at eventuel skæv sammentrykning udlignes. Middelværdien af de to transduceres sammentrykning vil på denne måde være middeltøjningen på grund af deres symmetriske placering.

Ved forsøget bestemmes betonens trykstyrke (på en anden cylinder) først for at fastlægge spændingsniveauerne ved bestemmelse af E-modul.

Dernæst monteres transducerne på emnet, der placeres centreret i prøvemaskinen. Til kontrol af opstillingen belastes der tre gange til mellem 10 og 15 % af trykstyrken, og dernæst belastes tre gange til 1/3-del af trykstyrken.

E-moduler måles som et sekant-E-modul ved 33 % af forventet brudlast og ved henholdsvis første og tredje belastning. E-modulet, der måles ved den første belastning, kaldes initial E-modul  $E_{C0}$ , og E-modulet, der måles ved den tredje belastning, kaldes sekant E-modul  $E_{CS}$ . Det skal bemærkes, at betegnelsen initial E-modul, der anvendes i standarden, reelt er et sekant E-modul. "Initial" anvendes, fordi det er den værdi der opnås ved den første belastning.

$E_{CS}$  vil normalt være mindre end  $E_{C0}$ .

$E_{C0}$  anvendes oftest ved hærdeberegninger, da det er mål for E-modulet ved første belastning, og ved hærdning af en betonkonstruktion er det første gang, den udsættes for en last.  $E_{CS}$  anvendes normalt ved deformationsberegninger.



Figur 7. Måling af E-modul.

I opstillingen vist på Figur 7, anvendes 3 deformationstransducere (markeret med blå pile), men efter standarden er det kun nødvendigt at anvende to transducere placeret på to modstående sider. Trykprøvemaskinens trykplade understøttes af en meget stor kugleskål, der sikrer, at trykpladen kan dreje. Alligevel kan friktion i denne kugleskål betyde en lidt skæv påvirkning af prøveemnet, og derfor kan det være nødvendigt at omcentrere emnet i henhold til prøvemethodens krav. I den viste opstilling anvendes derfor en kugleskål øverst markeret med gul pil. Denne kugleskål "erstatte" prøvemaskinens kugleskål, der fastlåses, og dette betyder, at sammentrykningen i de to sider bliver mere ens, da eventuel friktion vil betyde langt mindre med en lille kugleskål.

#### 10.3.4 Litteratur

- [1] DS/EN 1992-1-1 DK NA:2013, " Nationalt annekst til Eurocode 2: Betonkonstruktioner, Del 1-1: Generelle regler samt regler for bygningskonstruktioner
- [2] DS/EN 12390-13:2013 "Prøvning af hærdnet beton - Del 13: Bestemmelse af elasticitetsmodul (sekantmodul) under trykpåvirkning"
- [3] [http://projekter.aau.dk/projekter/files/56006780/Betons\\_Elasticitetsmodul\\_og\\_Trykstyrke.pdf](http://projekter.aau.dk/projekter/files/56006780/Betons_Elasticitetsmodul_og_Trykstyrke.pdf)
- [4] [http://www.gronbeton.dk/media/4650/138356\\_arbejdskurver.pdf](http://www.gronbeton.dk/media/4650/138356_arbejdskurver.pdf)